例: $9yy'+4x=0$, $y(0)=1$

$9yy'=-4x$

$9y\frac{dy}{dx}=-4x$

兩邊積分 $\int 9y\cdot dy=\int -4x\cdot dx$

$\frac{9}{2}y^2=-2x^2+C$

移項 $\frac{9}{2}y^2+2x^2=C$

$\times\frac{1}{9}\div 2$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=C$

$y(0)=1$ 代入上式

$0+\frac{y(0)}{4}=C$ 1 趨近於1, 滿足 $y(0)=1$ 的條件

$\therefore C=\frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{4}$ #

例: 解 $y'=-2xy$, $y(0)=1$

(sol) $\frac{dy}{dx}=-2xy$

移項 $\frac{dy}{y}=-2x\cdot dx$

兩邊積分 $\int\frac{dy}{y}=\int -2x\cdot dx$

$\ln|y|=-x^2+\tilde{c}$

取e $e^{\ln|y|}=e^{-x^2+\tilde{c}}$

$y=e^{-x^2}\cdot e^{\tilde{c}}$

$y=c\cdot e^{-x^2}$ $e^{\tilde{c}}=c$

$y(0)=1$, $x=0$ 代入

$1=c\cdot e^0$ $e^{-0^2}=1$

$C=1$

$y=e^{-x^2}$ #

例 $2xyy'-y^2+x^2=0$

(sol) $\boxed{通除\ x^2}$ $2(\frac{y}{x})y'-(\frac{y}{x})^2+1=0$

令 $\boxed{u=\frac{y}{x}}$, $y=ux$, $y'=u+u'x$

代入原式 $2uy'-u^2+1=0$

y'代入 $2u(u+u'x)-u^2+1=0$

移項 $u'x+u=\frac{u^2-1}{2u}$

$u'x=\frac{u^2-1}{2u}-\frac{2u^2}{2u}$ $=u$

$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{-(u^2+1)}{2u}$

移項 $\int\frac{2u\cdot du}{1+u^2}=\int -\frac{dx}{x}$

並積分 $\int\frac{du^2+1}{1+u^2}=\int -\frac{dx}{x}$

$\ln(1+u^2)=-(\ln|x|+\overset{*}{c})$

兩邊取e $e^{\ln(1+u^2)}=e^{(-\ln|x|+\overset{*}{c})}$

$1+u^2=e^{\ln\frac{1}{|x|}}\cdot e^{\overset{*}{c}}$

$1+u^2=\frac{1}{x}\cdot e^{\overset{*}{c}}$

$1+u^2=\frac{1}{x}\cdot C$

$1+u^2=\frac{C}{x}$

$y=\frac{y}{x}$ 代入上式

$1+(\frac{y}{x})^2=\frac{C}{x}$

通乘 x^2 $x^2+y^2=Cx$ #

負指數. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ 分數指數

$\int\frac{2udu}{1+u^2}=\int\frac{du^2}{1+u^2}$ $\frac{du^2}{\cancel{du}}\cdot du$ $2u$

例: $(2x-4y+5)y'+(x-2y+3)=0$

(sol) 令 $u=ay+bx+k$

觀察 $(2x-4y)$ 和 $(x-2y)$ 項, 可建議 $u=x-2y$ (找出 $y' \leftrightarrow u'$ 的關係)

故 $2y=x-u \Rightarrow y=\frac{x-u}{2}$, $y'=\frac{(1-u')}{2}$

代回原式 $(2u+5)y'+(u+3)=0$

$(2u+5)\frac{(1-u')}{2}+(u+3)=0$

兩邊×2, 展開, 移項 $(2u+5)+2(u+3)=(2u+5)u'$

$4u+11=(2u+5)u'$ $\quad u'=\frac{du}{dx}$

兩邊×2. 移項 $\frac{2(2u+5)}{4u+11}\cdot du=2\cdot dx$

$\frac{4u+10}{4u+11}du=2dx$

$\frac{(4u+11)-1}{4u+11}du=2dx$

$1-\frac{1}{4u+11}du=2dx$

兩邊積分 $\int 1-\frac{1}{4u+11}du=\int 2dx$ $\quad \int\frac{c}{ax+b}dx=\frac{c}{a}\ln|ax+b|+c^*$ 記住

$u-\frac{1}{4}\ln|4u+11|=2x+c^*$

$u=x-2y$ 代回上式

$x-2y-\frac{1}{4}\ln|4x-8y+11=2x+c^*$

移項 $-x-2y-\frac{1}{4}\ln|4x-8y+11|=c^*$

兩邊乘(-4) $\quad 4x+8y+\ln|4x-8y+11|=c$ ※