Chapter 1 First-order ordinary differential equations (ODE)
一階常微分方程

1.1 基本概念

$y=f(x)$或 $y=f(t)$，y 是 x 或 t 的函數，y 是因變數(dependent variable)，x 或 t 是自變數(independent variable)

◎ **微分方程**(differential equations)：一方程式包含有因變數 y 關於自變數 x 或 t 的導數(derivatives) $\dot{y}, y'$或微分(differentials) dy 。

◎ **常微分方程**(ordinary differential equations, ODE)：一微分方程包含有一個或數個因變數（通常為 $y(x)$）關於僅有一個自變數 x 的導數。

Ex. $y'=\cos x,\qquad y''+9y=0,\qquad x^2y'''y'+2e^xy''=(x^2+2)y^2$

◎ **偏微分方程**(partial differential equations, PDE)：一微分方程包含至少有一個因變數關於兩個以上自變數的部分導數。

Ex. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

◎ 微分方程的階數：在微分方程式中所出現最高階導數的階數。

◎ 線性微分方程：在微分方程式中所出現的**因變數**或其導數僅有一次式(first degree)而無二次以上的乘積（自變數可以有二次以上的乘積）。

Ex. $y''+4xy'+2y=\cos x$ 因變數：y，自變數：x，二階線性常微分方程
$y''+4yy'+2y=\cos x$ 因變數：y，自變數：x，二階非線性常微分方程
$x^2y'''y'+2e^xy''=(x^2+2)y^2$ 因變數：y，自變數：x，三階非線性常微分方程

□ **一階常微分方程**(first-order ordinary differential equations)

隱式形式(implicit form) 表示 $F(x,y,y')=0$ (4)

顯式形式(explicit form) 表示 $y'=f(x,y)$

Ex. 隱式形式 ODE $x^{-3}y'-4y^2=0$，當 $x\neq 0$時，可表示為顯式形式 $y'=4x^3y^2$

□ 解的概念(concept of solution)

在某些開放間隔區間 $a < x < b$，一函數 $y = h(x)$ 是**常微分方程** $F(x, y, y') = 0$ 的解，其函數 $h(x)$ 在此區間 $a < x < b$ 是明確(defined)且可微分的(differentiable)，其 $h(x)$ 的曲線（或圖形）是被稱爲解答曲線(solution curve)。

Example 1 解的確認(verification of solution)

$y = h(x) = c/x$（c 是任意常數，$x \neq 0$）是常微分方程 $xy' = -y$ 的解答。將 y 微分，$y' = h'(x) = -c/x^2$ 且乘以 x，得到 $xy' = -c/x = -y$。

Example 3 指數成長(exponential growth)，指數衰退(exponential decay)

$y = ce^{3t}$（c 是任意常數），對 y 微分可得到

$y' = \dfrac{dy}{dt} = 3ce^{3t} = 3y$　　因此可以顯示 $y = ce^{3t}$ 是 $y' = 3y$ 的解答

$y' = 3y$ 是指數成長的方程式

相似地，$y = ce^{-0.2t}$（c 是任意常數）是 $y' = -0.2y$ 的解答
因此 $y' = -0.2y$ 是指數衰退的方程式

□ 微分方程的解答(solution of DE)

- 通解(general solution)：解答裡包含有一個或多個常數（或參數）。
  例如：$y = ce^{3t}$

- 特解(particular solution)：當通解的參數從起始值條件被確定後之解。
  例如：$y = 2e^{3t}$

□ 起始值問題(initial value problem)

在工程上之問題，我們所較感興趣的是其特解 $y(x)$ 滿足所給予的起使條件(initial condition) $y(x_0) = y_0$。一個一階常微分方程並且伴隨著起使條件，我們稱此數學問題爲起始值問題

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Example 4 起始值問題(initial value problem)

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3y, \qquad y(0) = 5.7$$

解答：從之前例子其通解為 $y = ce^{3t}$，因此帶入起使條件得到

$$y(0) = ce^0 = c = 5.7 \qquad \text{所以其特解為} \quad y = 5.7e^{3t}$$

檢查：$y' = 3 \cdot 5.7e^{3t} = 3y$ $\qquad y(0) = 5.7e^0 = 5.7$

Example 5 $\quad y' = \dfrac{dy}{dx} = ky, \qquad y(0) = 0.5 \qquad$ (k 是任意常數)

解答：從之前例子其通解為 $y = ce^{kt}$，因此帶入起使條件得到

$$y(0) = ce^0 = c = 0.5 \qquad \text{所以其特解為} \quad y = 0.5e^{kt}$$

檢查：$y' = k \cdot 0.5e^{kt} = ky$ $\qquad y(0) = 0.5e^0 = 0.5$