二階非齊次 DE

$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ —① $r(x)\neq 0$.

通解為 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 是齊次 DE 的解.

$y_p(x)$ 是任何式 ① 不含任意常数的解. (y_p 沒有 c_1, c_2 的函数)

例: 解 $\overbrace{y''+2y'+101y}^{y_h}=\overbrace{10.4e^{x}}^{y_p}$ $y(0)=1.1$, $y'(0)=-0.9$

step 1. 求 y_h

$\lambda^2+2\lambda+101=0$.

$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times101}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-400}}{2}=\frac{-2\pm20i}{2}=-1\pm10i$

$\omega=10$

$y_h=e^{-\frac{2}{2}x}(A\cos10x+B\sin10x)=e^{-x}(A\cos10x+B\sin10x)$ #

step 2. 求 y_p.

試 $y=ce^{x}$ 代入原式

$(1+2+101)ce^{x}=10.4e^{x}$,

$c=0.1$, $y_p=0.1e^{x}$ #

故 $y=y_h+y_p=e^{-x}(A\cos10x+B\sin10x)+0.1e^{x}$ #

step 3. $y(0)=A+0.1=1.1$ [x 以 0 代入, 則 $e^{-x}=e^{-1}=1$
$A\cos10x=A\cos0=A$
$B\sin10x=B\sin0=0$
$0.1e^{x}=0.1\cdot1=0.1$]

$A=1$

$y=e^{-x}(\cos10x+B\sin10x)+0.1e^{x}$

$y'=\underbrace{e^{-x}}_{1}(-\underbrace{\cos10x}_{1}-B\underbrace{\sin10x}_{0}-10\underbrace{\sin10x}_{0}+10B\underbrace{\cos10x}_{1})+0.1\underbrace{e^{x}}_{1}$

$x=0$ 代入.

$y'(0)=-1+10B+0.1=-0.9$

$B=0$.

故 $y=\underbrace{e^{-x}\cdot\cos10x}_{y_h}+\underbrace{0.1e^{x}}_{y_p}$ #

二階非齊次未定係數法.

假如 $r(x)$是下表的函數形式,其解 y_p 為第二欄之相對函數.

重要

$r(x)$ 第一欄	y_p 第二欄
$k e^{rx}$	$C e^{rx}$
$k x^n \quad (n=0,1\cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x^1 + K_0$
$k \cos \omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$k \sin \omega x$	
$k e^{ax}\cos\omega x$	$e^{ax}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$
$k e^{ax}\sin\omega x$	

例: $kx^2 = K_2x^2 + K_1x + K_0$

修正原則: 假如 y_p 正巧是式(1)之 y_h 解,則 y_p 乘 x,若 y_p 為重根則乘 x^2

(先解出 y_h,若解出後 $y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}$ 的形式時,y_p 本來為 Ce^x,修正為 Cx^2e^x.)

相加原則: 假如 $r(x)$是第一欄內數個函數之相加,則 y_p 也是第2欄相對應函數之相加和。

例: 解 $y'' + 4y = 8x^2$ (${8x^2}$ 符合 kx^n 的形式)

(Sol) $y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$

$y_p' = 2K_2x + K_1$

$y_p'' = 2K_2$

代回 $2K_2 + 4(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 8x^2$

$(4K_2x^2) + (4K_1x) + (2K_2 + 4K_0) = 8x^2$

比較各係數 $4K_2 = 8$, $4K_1 = 0$, $2K_2 + 4K_0 = 0$

$K_2 = 2$, $K_1 = 0$. $K_0 = -1$

$y_p = 2x^2 - 1$

求 y_h, $y'' + 4y = 0$.

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda = 0 \pm 2i$

$\lambda = \frac{0 \pm \sqrt{0-4\times4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = 0 \pm 2i$, $\omega = 2$.

$y_h = e^0(A\cos 2x + B\sin 2x) = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + (2x^2 - 1)$ ※

例. 解 $y''-3y'+2y=e^{x}$

(sol) $y=y_h+y_p$

$\lambda^2-3\lambda+2=0.$

$(\lambda-1)(\lambda-2)=0,\quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$

$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

沖1乘x. 沖2個(重根)時乘x^2

$r(x)=e^{x}$, 原本 $y_p=ce^{x}$. 但與y_h相同, 採用修正原則, 成 $y_p=c\cdot x\cdot e^{x}$

$y_p=c\cdot x\cdot e^{x}$

$y_p'=c\cdot e^{x}+cxe^{x}=c(e^{x}+xe^{x})$

$y_p''=c\cdot e^{x}+c\cdot e^{x}+cxe^{x}=c(2e^{x}+xe^{x})$

代回原式 $c(2e^{x}+xe^{x})-3c(e^{x}+xe^{x})+2cxe^{x}=e^{x}$

$2ce^{x}+\cancel{cxe^{x}}-3ce^{x}+\cancel{3cxe^{x}}+\cancel{2cxe^{x}}=e^{x}$ 相消

$-ce^{x}=e^{x}$

$\therefore c=-1$

$y=y_h+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+(-x\cdot e^{x})$ ※

課本例題. 解 $y''+y=0.001x^2 \quad y(0)=0 \quad y'(0)=1.5$

(sol) $y=y_h+y_p.$

$\lambda^2+1=0 \qquad \lambda=\frac{0\pm\sqrt{0-4}}{2}=\frac{\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{\pm 2i}{2}=0\pm i,\ \omega=1$

$y_h=A\cos x+B\sin x$

$y_p=kx^2$ (0.001x^2 符合 x^n的形式)

$y_p'=2kx. \qquad y_p''=2k.$

代回原式 $2k+kx^2=0.001x^2.$

比較係數 $k=0.001,\quad 2k=0.$ 矛盾

$y_p=k_2x^2+k_1x+k_0.$

$y_p'=2k_2x+k_1$

$y_p''=2k_2.$ 代回原式 $2k_2+k_2x^2+k_1x+k_0=0.001x^2$

比較係數 $k_2=0.001,\ k_1=0.\ 2k_2+k_0=0,\ k_0=-0.002$

$y=A\cos x+B\sin x+0.001x^2+(-0.002)$

$y(0)=A-0.002=0.$ 初始值

$A=0.002.$

$y'=-A\sin x+B\cos x+0.002x$

$y'(0)=B=1.5.$

$y=0.002\cos x+1.5\sin x+0.001x^2-0.002$ ※

例 解 $y''+2y'+5y = \underbrace{1.25e^{0.5x}+40\cos 4x-55\sin 4x}_{r(x)}$

(sol) $y=y_h+y_p$.

$\lambda^2+2\lambda+5=0$.

$\lambda=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\times5}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i \qquad \omega=2.$

$y_h=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

由表 $y_p=C\cdot e^{0.5x}+K\cos 4x+M\sin 4x$

$y_p'=0.5Ce^{0.5x}-4K\sin 4x+4M\cos 4x$ 常数.

$y_p''=0.25Ce^{0.5x}-16K\cos 4x-16M\sin 4x$

代回原式 $(0.25Ce^{0.5x}-16K\cos 4x-16M\sin 4x)+2(0.5Ce^{0.5x}-4K\sin 4x$
$+4M\cos 4x)+5(C\cdot e^{0.5x}+K\cos 4x+M\sin 4x)=1.25e^{0.5x}+40\cos 4x-55\sin 4x$

$(0.25+1+5)Ce^{0.5x}+(-16K+8M+5K)\cos 4x+(-16M-8K+5M)\sin 4x$
$=1.25e^{0.5x}+40\cos 4x-55\sin 4x$

比較係數. $6.25C=1.25. \qquad C=0.2.$

$-16K+8M+5K=40 \qquad -11K+8M=40.$

$-8K-11M=-55$

$\Rightarrow K=0,\ M=5.$

$y_p=0.2e^{0.5x}+5\sin 4x$

$y=y_h+y_p=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+0.2e^{0.5x}+5\sin 4x$ #

課本例題 $y''+3y'+2.25y=-10e^{-1.5x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(sol) $y=y_h+y_p$.

$\lambda^2+3\lambda+2.25=0. \qquad \lambda=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4\times2.25}}{2}=\dfrac{-3\pm0}{2}=-1.5,\ -1.5$

有重根 $y_h=(C_1+C_2x)e^{-1.5x}$

(重根加 x^2)

由表 $y_p=Ce^{-1.5x}$; 修正原則 $y_p=C\cdot x^2e^{-1.5x}$

$y_p'=2Cxe^{-1.5x}-1.5Cx^2e^{-1.5x}$

$y_p''=2Ce^{-1.5x}-3Cxe^{-1.5x}-3Cxe^{-1.5x}+2.25Cx^2e^{-1.5x}$

代回原式

$(2c-3cx-3cx+2.25cx^2)\cancel{e^{-1.5x}}+(6cx-4.5cx^2)\cancel{e^{-1.5x}}+(2.25c)\cancel{e^{-1.5x}}$

$=(-10)\cancel{e^{-1.5x}}$

$(2c-3\cancel{c}x-3\cancel{c}x+2.2\cancel{5}cx^2)+(6\cancel{c}x-4.\cancel{5}cx^2)+(2.\cancel{2}5c)=-10$

$2c=-10,\quad c=-5.$

$y_p=-5x^2e^{-1.5x}$

$y=y_h+y_p=(c_1+c_2x)e^{-1.5x}-5x^2e^{-1.5x}$

初始值 $y(0)=c_1=1.\qquad y=c_1e^{-1.5x}+c_2xe^{-1.5x}-5x^2e^{-1.5x}$

$y'=-1.5c_1e^{-1.5x}+c_2e^{-1.5x}-1.5c_2\underbrace{x}_{=0}e^{-1.5x}-10\underbrace{x}_{=0}e^{-1.5}+7.5\underbrace{x^2}_{=0}e^{-1.5x}$

$y'(0)=-1.5c_1\underbrace{e^{-1.5x}}_{=1}+c_2\underbrace{e^{-1.5x}}_{=1}=-1.5c_1+c_2=0$

$c_2=1.5c_1$

$c_2=1.5$

$y=(1+1.5x-5x^2)e^{-1.5x}$ ※

課本例題 $y''+2y'+5y=e^{0.5x}+40\cos10x-190\sin10x,\quad y(0)=0.16,\ y'(0)=40.08$

(sol) $y=y_h+y_p.$

求y_h $\lambda^2+2\lambda+5=0.\qquad \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times5}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

$\omega=2$

$y_h=e^{-x}(A\cos2x+B\sin2x)$

$y_p=C\cdot e^{0.5x}+K\cos10x+M\sin10x$

$y_p'=0.5C\cdot e^{0.5x}+(-10k\sin10x)+10M\cos10x$

$y_p''=0.25C\cdot e^{0.5x}-100k\cos10x-100M\sin10x$

代回原式 $(0.25ce^{0.5x}-100k\cos10x-100M\sin10x)+ce^{0.5x}-20k\sin10x+20M\cos10x$

$+5ce^{0.5x}+5k\cos10x+5M\sin10x=e^{0.5x}+40\cos10x-190\sin10x.$

$(0.25c+c+5c)e^{0.5x}+(-100M-20k+5M)\sin10x+(-100k+20M+5k)\cos10x$

$=e^{0.5x}\qquad -190\sin10x\qquad +40\cos10x$

比較係數. $0.25c+c+5c=1\qquad 6.25c=1\qquad c=\frac{1}{6.25}=0.16$

$\left.\begin{array}{l}-95M-20k=190\\-95k+20M=40.\end{array}\right\}\ k=0.\ M=2$