Znd-Order Homogeneous Equations

$y''+ay'+by=0$

$\lambda^2+a\lambda+b=0$

$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

例: $y''-y=0$

(Sol) 設 $y=e^{\lambda x}$

$y'=\lambda e^{\lambda x}$

$y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

代回原式 $\lambda^2 e^{\lambda x}-e^{\lambda x}=0$

$(\lambda^2-1)e^{\lambda x}=0$

$\because e^{\lambda x}\neq 0$. $\therefore$ $\lambda^2-1=0$ $(\lambda+1)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ #

例: $y''+y'-2y=0$, $y(0)=4$. $y'(0)=-5$

(Sol) 特徵方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$.

因式分解 $(\lambda+2)(\lambda-1)=0$. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$.

or 使用公式 $\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$

$\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$

$y'=c_1e^{x}+(-2)c_2\cdot e^{-2x}=c_1e^{x}-2c_2e^{-2x}$

以 0 代入 $\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1+c_2=4 \\ y'(0)&=c_1-2c_2=-5 \end{aligned}\right\}$ $c_1=1$, $c_2=3$.

$y=e^{x}+3e^{-2x}$ #

$\sqrt{a^2-4b}=0$ 時有重根.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. $\lambda=-\frac{a}{2}$ $y_1=e^{-\frac{a}{2}x}$

$y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{a}{2}x}$ ← λx

例：$y''+8y'+16y=0$

(sol) 特徵方程式為 $\lambda^2+8\lambda+16=0$

$$(\lambda+4)^2=0$$

$$\lambda=-4,-4.$$

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4x}$$

例：解 $y''-4y+4y=0.$ $y(0)=3.$ $y'(0)=1$

特徵方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=0.$

$$(\lambda-2)^2=0$$

$$\lambda=2,2,$$

$$y(x)=(c_1+c_2x)\cdot e^{2x}$$

$$y'(x)=c_2\cdot e^{2x}+2(c_1+c_2x)e^{2x}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1=3. \\ y'(0)&=c_2+2c_1=1. \end{aligned}\right\} \quad c_2=-5.$$

$$y=(3-5x)e^{2x}$$

複数根

$\sqrt{a^2-4b}=-(\quad)$ 負值

$y_1=e^{-\frac{a}{2}x}\cdot\cos\omega x,$ $\quad y_2=e^{-\frac{a}{2}x}\cdot\sin\omega x$

$\omega^2=b-\frac{1}{4}a^2,$ $\quad \boxed{\omega=\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}$

$$\underline{y=e^{-\frac{a}{2}x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)}$$

例：$y''+0.4y'+9.04y=0$ $\quad y(0)=0,$ $\quad y'(0)=3.$

特徵方程式 $\lambda^2+\underbrace{0.4}_{a}\lambda+\underbrace{9.04}_{b}=0.$

(sol) $\omega=\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{9.04-\frac{1}{4}(0.4)^2}=\sqrt{9.04-\frac{1}{4}(0.16)}=\sqrt{9}=3.$

$$\lambda_1=-\frac{a}{2}+i\omega=-\frac{0.4}{2}+i3.$$

$$\lambda_2=-\frac{a}{2}-i\omega=-\frac{0.4}{2}-i3$$

$$y=e^{-0.2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$$

$y(0) = A = 0.$ [$x=0$代入y]

則 $y = B\cdot e^{-0.2x}\cdot \sin 3x$

$y' = B(-0.2e^{-0.2x}\cdot \sin x + 3\cdot e^{-0.2x}\cdot \cos 3x)$

$y'(0) = 3B = 3.$

$B = 1.$

$\rightarrow y = e^{-0.2x}\sin 3x$ #

$x=0$ 時.
$\cos 0 = 1$
$\sin 0 = 0$

例: 解 $y''+y'+0.25y=0,\quad y(0)=3.0.\ y'(0)=-3.5$

(sol) 特徵方程式 $\lambda^2+\lambda+0.25=0.$

$(\lambda^2+0.5)^2=0.$ 有重根 $\lambda=-0.5, -0.5.$

$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

$=\underline{(c_1+c_2x)}\ \underline{e^{-0.5x}}$ [微前×後+微後×前]

$y' = c_2\cdot e^{-0.5x} - 0.5(c_1+c_2x)e^{-0.5x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 3.0 \\ y'(0) &= c_2 - 0.5c_1 = -3.5 \end{aligned}\right\} c_2=-2.$$

$y=(3.0-2x)e^{-0.5x}$

Euler-Cauchy Equation

$\boxed{x^2y''+axy'+by=0}$

$\boxed{m^2+(a-1)m+b=0.}$

m 用一元二次方程式 根$=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\underline{y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}}$

例: 解 $x^2y''-2.5xy'-2.0y=0$

(sol) $(a-1)=-2.5-1=-3.5$

輔助方程式 $m^2+(a-1)m+b=0.$

$m=\dfrac{-(-3.5)\pm\sqrt{(-3.5)^2-4\times(-2.0)}}{2}$ $\sqrt{20.25}=4.5.$

$m^2-3.5m-2.0=0$

$(m+0.5)(m-4)=0.\quad m_1=-0.5.\ m_2=4$

$y=c_1\cdot x^{-0.5}+c_2x^4.$

$=\dfrac{c_1}{\sqrt{x}}+c_2x^4.$

$x^{-0.5}=x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$ (分數指數)

$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ (負指數)