1.5 線性常微分方程(linear ODE) 及白努利方程式 (Bernoulli equation)

若一階常微分方程可以改寫成下式則稱爲一階線性常微分方程

$$y' + f(x)y = r(x)$$

◎ 假如 $r(x) \equiv 0$，則稱此方程式爲齊次(homogeneous)線性常微分方程

$y' + f(x)y = 0$ 利用分離變數法可得 $\dfrac{dy}{y} = -f(x)dx$

兩邊積分 $\ln|y| = -\int f(x)dx + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad y = ce^{-\int f(x)dx} \quad (c = e^{\tilde{c}})$

◎ 假如 $r(x) \neq 0$，則稱此方程式爲非齊次(nonhomogeneous)線性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x) \quad \Rightarrow \quad (fy - r)dx + dy = 0$$

$P = fy - r$, $Q = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = f \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow$ 不是正合

$R = \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{1}(f - 0) = f(x)$ 所以積分因子爲

$F(x) = e^{\int R(x)dx} = e^{\int f dx}$ 將積分因子乘以原式得到

$e^{\int f dx} \cdot (y' + fy) = e^{\int f dx} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \left(e^{\int f dx} \cdot y\right)' = e^{\int f dx} \cdot r$ 兩邊積分並讓 $h = \int f dx$

$$e^{h(x)} y(x) = \int e^{h(x)} \cdot r(x)dx + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)} \cdot r(x)dx\right] + ce^{-h(x)}$$

Example 1. $y' - y = e^{2x}$

Sol. $f(x) = -1$, $r(x) = e^{2x}$, $h(x) = \int f(x)dx = \int -1dx = -x$

$$y(x) = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)} \cdot r(x)dx\right] + ce^{-h(x)} = e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x}dx\right] + ce^{x} = e^{2x} + ce^{x}$$

Example 2. $y' + y\tan x = \sin 2x$, $y(0) = 1$

Sol. $f(x) = \tan x$, $r(x) = \sin 2x$, $h(x) = \int f(x)dx = \int \tan x dx = \ln|\sec x|$

$$e^{h(x)} = e^{\ln|\sec x|} = \sec x \quad , \quad e^{-h(x)} = e^{-\ln|\sec x|} = e^{\ln|\sec x|^{-1}} = \sec x^{-1} = \cos x$$

$$e^{h(x)}\cdot r(x)=\sec x\cdot\sin 2x=\sec x\cdot 2\sin x\cos x=2\sin x$$

$$y(x)=e^{-h}\left[\int e^h\cdot r dx\right]+ce^{-h}=\cos x\left[\int 2\sin x dx\right]+c\cos x=c\cos x-2\cos^2 x$$

從起始值條件可得 $y(0)=c\cos 0-2\cos^2 0=c-2=1 \quad\Rightarrow\quad c=3$

所以 ODE 之解爲 $y(x)=3\cos x-2\cos^2 x$

◎ 簡化爲線性型式，白努利方程式 (Bernoulli equation)

白努利方程式 $y'+p(x)y=g(x)y^a$ （ a 爲任意實數）

假如 $a=0$ 則 $y'+p(x)y=g(x)$ 爲非齊次線性一階常微分方程

$a=1$ 則 $y'+[p(x)-g(x)]y=0$ 爲齊次線性一階常微分方程

$a\neq 0,1$ 則 $y'+p(x)y=g(x)y^a$ 爲非線性一階常微分方程

讓 $u(x)=[y(x)]^{1-a}$ ，對 x 微分得

$$u'=(1-a)y^{-a}y'=(1-a)y^{-a}(gy^a-py)=(1-a)(g-py^{1-a})=(1-a)(g-pu)$$

$\Rightarrow u'+(1-a)pu=(1-a)g$ 經變數變換後可將非線性微分方程轉換成線性

Example 4. $y'-Ay=-By^2$

Sol. 因爲 $a=2$ 所以 $u=y^{1-2}=y^{-1}$ ，

$$u'=-y^{-2}y'=-y^{-2}(Ay-By^2)=B-Ay^{-1}=B-Au \quad\Rightarrow\quad u'+Au=B$$

$$u(x)=e^{-h}\left[\int e^h\cdot r dx\right]+ce^{-h}=e^{-Ax}\left[\int Be^{Ax}dx\right]+ce^{-Ax}=\frac{B}{A}+ce^{-Ax}$$

所以 $y=\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{ce^{-Ax}+B/A}$

Example 5. $y'=(y-1)(y-2)$

Sol. $\dfrac{dy}{dx}=(y-1)(y-2) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{(y-1)(y-2)}=dy\left[\dfrac{1}{y-2}-\dfrac{1}{y-1}\right]=dx$

兩邊積分得 $\ln|y-2|-\ln|y-1|=\ln\left|\dfrac{y-2}{y-1}\right|=x+\tilde{c}$ ，兩邊取指數得

$$\frac{y-2}{y-1}=ce^x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y-1}=1-ce^x \quad\Rightarrow\quad y=1+\frac{1}{1-ce^x}$$