

1.2 $y' = f(x, y)$ 的幾何意義(geometrical meaning)

一階常微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解答曲線可以描繪在 $x - y$ 平面上。我們在事先不知道解的形式，但是從 $y' = f(x, y)$ 可以知道其解答必通過點 (x_0, y_0) 且其斜率(slope)為 $y' = f(x_0, y_0)$ ，因此其繪製過程可描述如下：

- (1) 我們在 $x - y$ 平面上，繪製某一些 $f(x, y) = k$ (constant) 的曲線，此曲線被稱為等傾斜線(isoclines)。
- (2) 在固定斜率 k 之下，我們在 $x - y$ 平面上繪製很多具有斜率 $f(x, y) = k$ 之短的線段。
- (3) 改變不同斜率 k 值，重複步驟(2)可以直接獲得 $y' = f(x, y)$ 的解答。

Example $y' = f(x, y) = xy$ 等傾斜線(isoclines) $xy = k$

其通解為 $y(x) = ce^{x^2/2}$ c 為任意常數

當起使條件為 $y(1) = 2$ 或解答曲線通過點 $(x, y) = (1, 2)$ 時，

$$y(1) = ce^{1^2/2} = ce^{1/2} = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 2/\sqrt{e} = 1.213$$

因此其特解為 $y(x) = 1.213e^{x^2/2}$